



ویژه امتحانات دی ماه ۱۴۰۴

زودبسته

بانک آزمون های تشریحی ماز

یازدهم
ریاضی

حسابان ۱





فهرست

شمارهٔ آزمون	بودجه بندی
آزمون شمارهٔ ۱	جامع نیم سال اول
آزمون شمارهٔ ۲	فصل ۱
آزمون شمارهٔ ۳	فصل ۱ و ۲
آزمون شمارهٔ ۴	جامع نیم سال اول



آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: حسابان ۱		ساعت شروع:		تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۰۷		مدت امتحان: ۴۰ دقیقه	
نام و نام خانوادگی:		رشته: ریاضی فیزیک		پایه یازدهم دوره متوسطه		تعداد صفحات: ۲ صفحه	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)		[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]		نمره	
۱		درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) برای هر دو عدد حقیقی a و b ، رابطه $ a - b \leq a + b \leq a + b $ برقرار است. ب) در معادله $\Delta x^2 + 2x - 3 = 0$ ، مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{2}{5}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{3}{5}$ است. پ) دو تابع $f(x) = \frac{x}{ x }$ و $g(x) = \frac{ x }{x}$ با هم برابرند. ت) در تابع $f(x) = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می‌یابد.				۲	
۲		جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید. الف) فاصله دو خط موازی $4x - 3y + 1 = 0$ و $-4x + 3y - 2 = 0$ برابر است. ب) معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{2}$ باشد، به صورت است. پ) حاصل $\left[\frac{2x-1}{x+3} \right]$ به ازای $x = -\frac{1}{3}$ برابر است. ت) خط $y = 4$ ، نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$ را در نقطه‌ای به طول قطع می‌کند.				۲	
۳		گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $[a, +\infty)$ ، وارون‌پذیر است. حداقل مقدار a کدام است؟ ۱) -2 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1 ب) چه تعداد از توابع زیر یک‌به‌یک است؟ $y = \frac{1}{x}$ • $y = 3^{-x}$ • $y = 1 - \sqrt{x+1}$ • $x + [x]$ • ۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1 پ) اگر دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[x]-1}$ به صورت $[a, b) \cup \{c\}$ باشد، حاصل $a + b - c$ کدام است؟ ۱) 4 ۲) -4 ۳) 3 ۴) -3 ت) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - mx + 1 = 0$ و $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ باشد، m کدام است؟ ۱) فقط -2 ۲) فقط $+2$ ۳) ± 2 ۴) به ازای هر مقدار m برقرار است.				۲	
۴		بین دو عدد ۲ و ۳۲، هفت عدد چنان درج شده‌اند که نه عدد حاصل، دنباله هندسی صعودی تشکیل داده‌اند. مجموع این هفت عدد را به‌دست آورید.				۱/۷۵	
		ادامه سؤالات در صفحه بعد					

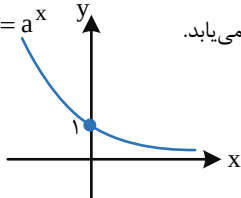




نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک	پایه یازدهم دوره متوسطه	تعداد صفحات: ۲ صفحه	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه	آزمون شبیه ساز نهایی درس: حسابان ۱	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۰۷
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی							
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)						
[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد]							
نمره							
۵	مثلث ABC با رأس های $A(-۳,۲)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(۱,۴)$ مفروض است: الف) طول میانه وارد بر ضلع AC را به دست آورید. ب) طول ارتفاع BH را به دست آورید.						
۶	معادله های زیر را به روش جبری حل کنید. الف) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = ۲$ ب) $(x+\frac{1}{x})^2 + ۳(x+\frac{1}{x}) + ۲ = ۰$ پ) $ ۲x+۱ -۳ =۱$						
۷	اگر $f = \{(۳,-۲), (۰,۱), (۲,۲), (-۱,۳)\}$ و $g = \{(۲,۰), (-۱,۳), (۱,-۱), (-۳,-۲)\}$ دو تابع باشند: الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید. ب) تابع $g^{-1} \circ f$ را به صورت مجموعه ای از زوج مرتب بنویسید. پ) حاصل $(۲f-۳g)(-۱)$ را بیابید.						
۸	اگر $f(x) = ۲ - \sqrt{x-۱}$ باشد، آن گاه دامنه و ضابطه وارون تابع f را به دست آورید.						
۹	توابع $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ و $g(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ داده شده اند. دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.						
۲۰	موفق باشید.						





آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: حسابان ۱		ساعت شروع:		تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۰۷		مدت امتحان: ۴۰ دقیقه											
نام و نام خانوادگی:		رشته: ریاضی فیزیک		پایه یازدهم دوره متوسطه		تعداد صفحات: ۱۰ صفحه											
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز													
ردیف	پاسخ‌نامه					نمره											
۱	الف) نادرست (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) پ) درست (۰/۵) ت) درست (۰/۵) مصحح شو:  بررسی دقیق‌تر: الف) توجه داشته باشید که: ب) در معادله $\Delta x^2 + 2x - 3 = 0$ داریم: پ) دو تابع $f(x) = \frac{x}{ x }$ و $g(x) = \frac{ x }{x}$ با هم برابرند، چرا که: ت) با توجه به نمودار تابع $f(x) = a^x$، می‌توان گفت که اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش مقدار x مقادیر f کاهش می‌یابد.  $0 < a < 1$					۲											
الف) چند ویژگی مهم قدرمطلق ($a > 0$):  <table><tr><td>۱) $x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$</td><td>۶) $x ^2 = x^2$</td></tr><tr><td>۲) $x = a \Rightarrow x = \pm a$</td><td>۷) $xy = x \times y$</td></tr><tr><td>۳) $x = a \Rightarrow x = \pm a$</td><td>۸) $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }; y \neq 0$</td></tr><tr><td>۴) $\sqrt{x^2} = x$</td><td>۹) $x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$</td></tr><tr><td>۵) $-x = x$</td><td>۱۰) $x \geq a \Rightarrow (x \geq a) \text{ یا } (x \leq -a)$</td></tr></table> توجه: برای هر عدد حقیقی a و b داریم: $* - a \leq a \leq a$, $* -(a + b) \leq a + b \leq a + b$ $* a + b \leq a + b$ (نامساوی مثلث) $\xrightarrow{ab \geq 0} a + b = a + b$ ب) مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها:  اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم: $\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها: } S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$								۱) $ x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$	۶) $ x ^2 = x^2$	۲) $ x = a \Rightarrow x = \pm a$	۷) $ xy = x \times y $	۳) $ x = a \Rightarrow x = \pm a$	۸) $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }; y \neq 0$	۴) $\sqrt{x^2} = x $	۹) $ x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$	۵) $ -x = x $	۱۰) $ x \geq a \Rightarrow (x \geq a) \text{ یا } (x \leq -a)$
۱) $ x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$	۶) $ x ^2 = x^2$																
۲) $ x = a \Rightarrow x = \pm a$	۷) $ xy = x \times y $																
۳) $ x = a \Rightarrow x = \pm a$	۸) $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }; y \neq 0$																
۴) $\sqrt{x^2} = x $	۹) $ x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$																
۵) $ -x = x $	۱۰) $ x \geq a \Rightarrow (x \geq a) \text{ یا } (x \leq -a)$																



پ (تساوی توابع):

دو تابع f و g را با هم برابر می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) دامنه توابع f و g با هم برابر باشند.

(۲) برای هر x از دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد.

به عبارت دیگر، دو تابع f و g زمانی با هم برابرند که دامنه هر دو تابع (قبل از ساده کردن) و ضابطه آنها (بعد از ساده کردن) با هم برابر باشند.

به عنوان مثال، دو تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ با هم برابر نیستند، چرا که $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ است.

نمودار توابع نمایی: $(f(x) = a^x)$

وضعیت	$a > 1$	$0 < a < 1$
نمودار		
دامنه	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
برد	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$

مصحح شو:

الف) $\frac{1}{5}$

ب) $x^2 - 2x - 1 = 0$

پ) (-1)

ت) $x = 3$

بررسی دقیق تر:

الف) ابتدا ضرایب x و y را در دو خط باهم برابر می‌کنیم، حال برای دو خط موازی $4x - 3y + 1 = 0$ و $4x - 3y + 2 = 0$ داریم:

$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

ب) می‌دانیم که ریشه‌های معادله درجه دوم، به صورت $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ و $\beta = 1 - \sqrt{2}$ است، پس:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} : S = \alpha + \beta = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} : P = \alpha\beta = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=2, P=-1} x^2 - 2x - 1 = 0$$

بنابراین معادله مورد نظر برابر است با:

پ) اگر $x = -\frac{1}{p}$ را در عبارت $\left[\frac{2x-1}{x+3}\right]$ جای گذاری کنیم، داریم:

$$\left[\frac{2(-\frac{1}{p})-1}{-\frac{1}{p}+3}\right] = \left[\frac{-1-1}{\frac{5}{2}}\right] = \left[\frac{-2}{\frac{5}{2}}\right] = \left[\frac{-4}{5}\right] = -1$$

ت) برای پیدا کردن طول نقطه برخورد خط $y = 4$ و تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ ، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 4 \Rightarrow (2^{-1})^{1-x} = 2^2 \Rightarrow (2)^{x-1} = 2^2 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$$





الف) فاصله دو خط موازی:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

ب) تشکیل معادله درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن:

با فرض اینکه α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، اگر مجموع ریشه‌ها را با $S = \alpha + \beta$ و حاصل ضرب آن‌ها را با $P = \alpha\beta$ نشان دهیم، آن‌گاه معادله درجه دوم موردنظر به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

پ) تابع جزء صحیح و برخی از خواص آن:

برای هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح آن، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد، جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال $[3/14] = 3$ و $[-2/8] = -3$ است. به عبارت دیگر: برخی از خواص جزء صحیح:

$$1) [x] = a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \leq x < a + 1$$

$$2) [x + a] = [x] + a; a \in \mathbb{Z}$$

$$3) 0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\text{به طور کلی}} 0 \leq f(x) - [f(x)] < 1$$

$$4) [x] + [-x] = \begin{cases} 0; & x \in \mathbb{Z} \\ -1; & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$5) [x] \leq a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x < a + 1$$

$$6) [x] \geq a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x \geq a$$

ت) پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد دو تابع f و g :

برای پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد دو تابع f و g ، کافی است که معادله $f(x) = g(x)$ را حل کنیم.

۲

مصحح شو:

ت) گزینه «۳» (۰/۵)

پ) گزینه «۴» (۰/۵)

ب) گزینه «۱» (۰/۵)

الف) گزینه «۲» (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) ابتدا طول رأس سهمی $f(x) = x^2 - 4x + 5$ را به دست می‌آوریم:

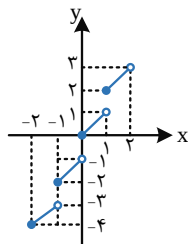
$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

بنابراین، سهمی $f(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه‌های $[2, +\infty)$ و $(-\infty, 2]$ و هر زیرمجموعه‌ای از این بازه‌ها، یک‌به‌یک است. از طرفی طبق گفته سؤال، این سهمی در بازه $[a, +\infty)$ یک‌به‌یک است، بنابراین حداقل مقدار a ، برابر ۲ است.

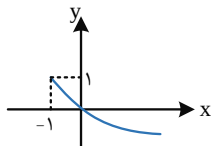
ب) می‌دانیم که اگر هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن تابع یک‌به‌یک است، پس ابتدا نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

۳

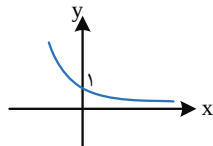




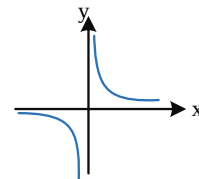
$$y = x + [x]$$



$$y = 1 - \sqrt{x+1}$$



$$y = 2^{-x}$$



$$y = \frac{1}{x}$$

همان طور که مشخص است، همه توابع داده شده در دامنه تعریف خود، یک به یک می باشند، چرا که هر خط موازی محور x ها، یا نمودار این توابع را قطع نمی کند و یا اینکه فقط در یک نقطه قطع می کند.

پ) دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[x]-1}$ را به دست می آوریم:

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$[x]-1 \neq 0 \Rightarrow [x] \neq 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$\Rightarrow D_y = [-2, 2] - [1, 2) = [-2, 1) \cup \{2\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a+b-c = -3$$

ت) می دانیم که α و β ریشه های معادله $x^2 - mx + 1 = 0$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = m$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

از طرفی، با توجه به رابطه $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ داریم:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = 2 \Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = 2 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{1} = 2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

توجه کنید که با توجه به اتحاد مربع دو جمله ای داریم:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

توجه: تابع یک به یک، دامنه توابع رادیکالی، دامنه توابع گویا، روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم:

الف) بعضی از توابع در دامنه خود یک به یک نمی باشند، اما با محدود کردن دامنه آن ها می توان این توابع را به تابعی یک به یک تبدیل کرد. به عنوان

مثال، تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، در بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا $[\frac{b}{2a}, +\infty)$ و یا در هر زیرمجموعه از یکی از این دو بازه، تابعی یک به یک است.

ب) یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

پ) دامنه توابع رادیکالی: برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی، با توجه به فرجه رادیکال داریم:

- اگر فرجه رادیکال فرد باشد، دامنه تابع با دامنه عبارت زیر رادیکال برابر است؛ به عبارت دیگر، رادیکال فرجه فرد را نادیده می گیریم و فقط دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$$

- اگر فرجه رادیکال زوج باشد، برای پیدا کردن دامنه تابع، مراحل زیر را انجام می دهیم:

(۱) دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می آوریم. (D_g)

(۲) عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار می دهیم و مجموعه جواب آن را به دست می آوریم. ($g(x) \geq 0$)، دقت کنید که اگر رادیکال با

فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت زیر رادیکال رو بزرگ تر از صفر بذاریم. فب معلومه دیکه، مخرج کسر که نمیتونه صفر باشه!

(۳) از محدوده های به دست آمده در مراحل ۱ و ۲، اشتراک می گیریم:





$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x | x \in D_g, g(x) \geq 0\}$$

دامنه توابع گویا: برای پیدا کردن دامنه توابع گویا به فرم $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ توابع چندجمله‌ای هستند، ریشه‌های عبارت مخرج کسر را (در صورت وجود) پیدا کرده و آن را از مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) حذف می‌کنیم، به عبارت دیگر:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x | Q(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج کسر}\}$$

(ت) روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم:

اگر α و β ، ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$* \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$* |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$* \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

$$* \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

$$* \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

$$* \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

۱/۷۵

مصحح شو:

۴

می‌خواهیم بین دو عدد ۲ و ۳۲، هفت عدد چنان درج کنیم که نه عدد حاصل، تشکیل یک دنباله هندسی صعودی بدهند، پس:

$$\begin{matrix} 2, & O, & O, & O, & O, & O, & O, & 32 \\ \downarrow & & & & & & & \downarrow \\ a_1 & & & & & & & a_9 \end{matrix}$$

$$\frac{a_9}{a_1} = \frac{a_1 q^8}{a_1} = q^8 = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow (q^2)^4 = 2^4 \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\text{دنباله صعودی}} q = \sqrt{2}$$

بنابراین، اولین عدد درج شده برابر $2\sqrt{2}$ است، پس:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t_1 = 2\sqrt{2} \\ q = \sqrt{2} \end{cases} &\Rightarrow S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow{n=7} S_7 = \frac{2\sqrt{2}(1-(\sqrt{2})^7)}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-32}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+4-32-32\sqrt{2}}{-1} = 30\sqrt{2}+28 \quad (0/25) \end{aligned}$$

دنباله هندسی، مجموع جملات در دنباله هندسی:

(۱) تعریف دنباله هندسی: به دنباله‌ای که هر جمله از آن (غیر از جمله اول) با ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلی خود به دست می‌آید، دنباله هندسی می‌گوییم و این مقدار ثابت را نیز قدرنسبت می‌نامیم. حال اگر جمله اول دنباله هندسی را با a_1 و قدرنسبت آن را با q نمایش دهیم، جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است.

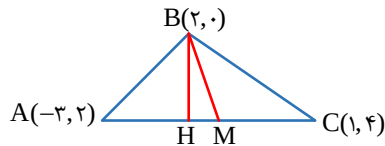
(۲) مجموع جملات، در یک دنباله هندسی: اگر مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را با S_n نمایش دهیم، داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$





مصحح شو:



اگر فرض کنیم که مثلث $\triangle ABC$ به صورت مقابل باشد، داریم:

BH: ارتفاع وارد بر AC

BM: میانه وارد بر AC

الف) برای پیدا کردن طول میانه وارد بر AC، (طول BM) باید فاصله نقطه B را از نقطه M (وسط ضلع AC) پیدا کنیم. برای این کار، ابتدا مختصات نقطه M را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad (0/25) \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow M(-1, 3)$$

حال، فاصله نقطه B را از نقطه M به دست می‌آوریم که همان طول میانه وارد بر AC است:

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2} \quad (0/25)$$

ب) برای پیدا کردن طول ارتفاع وارد بر AC (طول BH)، باید فاصله نقطه B را تا ضلع AC به دست بیاوریم که برای این کار ابتدا باید معادله خطی را که از دو نقطه $A(-3, 2)$ و $C(1, 4)$ می‌گذرد، پیدا کنیم:

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4 - 2}{1 - (-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow x - 2y + 7 = 0 \quad (0/25)$$

حال، فاصله نقطه $B(2, 0)$ ، از خط $x - 2y + 7 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$BH = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(1) - 2(0) + 7|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ یا } \frac{9\sqrt{5}}{5} \quad (0/25)$$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط، فاصله دو نقطه، فاصله نقطه از خط، معادله خط گذرنده از دو نقطه:



۱) مختصات نقطه وسط یک پاره خط:

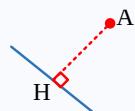
اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه از یک خط باشند، مختصات نقطه وسط این دو نقطه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

۲) فاصله دو نقطه: برای پیدا کردن فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از هم، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

۳) فاصله نقطه از خط: برای پیدا کردن فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$ ، از رابطه زیر کمک می‌گیریم:



$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۴) معادله خط گذرنده از دو نقطه:

اگر مختصات نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را در اختیار داشته باشیم به کمک دو رابطه زیر می‌توانیم معادله خط گذرنده از این دو نقطه را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} : \text{شیب خط} \\ y - y_A = m(x - x_A) : \text{معادله خط} \end{cases}$$





الف) ابتدا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \Rightarrow (x + \sqrt{x^2 - 1}) + (x - \sqrt{x^2 - 1}) + 2\sqrt{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})} = 4 \quad (0/25)$$

مزدوج

$$\Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - (x^2 - 1)} = 4 \Rightarrow 2x + 2 = 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad (0/25)$$

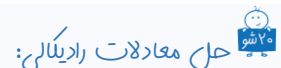
ب) در معادله داده شده، ابتدا $x + \frac{1}{x}$ را برابر t فرض می‌کنیم:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \underbrace{t^2 + 3t + 2 = 0}_{(0/25)} \Rightarrow (t+1)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \quad (0/25) \\ t = -2 \quad (0/25) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x + \frac{1}{x} = t} \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه حقیقی ندارد.} \quad (0/25) \\ x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad (0/25) \end{cases}$$

پ) می‌دانیم که اگر $|f(x)| = a$ باشد، در این صورت $f(x) = a$ یا $f(x) = -a$ است، پس:

$$||2x+1|-3|=1 \Rightarrow \begin{cases} |2x+1|-3=1 \Rightarrow |2x+1|=4 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=4 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \quad (0/25) \\ 2x+1=-4 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \quad (0/25) \end{cases} \\ |2x+1|-3=-1 \Rightarrow |2x+1|=2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=2 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \quad (0/25) \\ 2x+1=-2 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \quad (0/25) \end{cases} \end{cases}$$



برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

- ۱) یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.
- ۲) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.)
(توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد، سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.)
- ۳) معادله به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به دست می‌آوریم.
- ۴) جواب(های) به دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادله اصلی صدق کنند.



الف) می‌دانیم که $f = \{(3, -2), (0, 1), (2, 2), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, 0), (-1, 3), (1, -1), (-3, -2)\}$ است، پس:

$$D_{\frac{f}{g}} : D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \quad (*) \quad (0/25)$$

$$D_f : \{3, 0, 2, -1\} \quad D_g : \{2, -1, 1, -3\} \Rightarrow D_f \cap D_g : \{-1, 2\}$$

از طرفی با توجه به زوج مرتب $(2, 0) \in g$ ، می‌توان فهمید که تابع g به ازای $x = 2$ برابر صفر است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} D_{\frac{f}{g}} : \{-1, 2\} - \{2\} = \{-1\} \quad (0/25)$$





ب) برای به دست آوردن تابع g^{-1} of g ، ابتدا به کمک تابع g ، تابع g^{-1} را تشکیل می‌دهیم که برای این کار باید در تابع g ، در تمامی زوج مرتب‌ها، جای مؤلفه اول و دوم را عوض کنیم:

$$g = \{(2, 0), (-1, 3), (1, -1), (-3, -2)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(0, 2), (3, -1), (-1, 1), (-2, -3)\} \quad (0/25)$$

حال برای تشکیل تابع g^{-1} of g داریم:

$$x = 3 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g^{-1}} -3 \Rightarrow (3, -3) \in g^{-1} \text{ of } g$$

$$x = 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g^{-1}} x$$

$$x = 2 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} x$$

$$x = -1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g^{-1}} -1 \Rightarrow (-1, -1) \in g^{-1} \text{ of } g$$

$$\text{بنابراین: } g^{-1} \text{ of } g = \{(3, -3), (-1, -1)\} \quad (0/25)$$

$$(2f - 3g)(-1) = \underbrace{2f(-1) - 3g(-1)}_{(0/25)} = 2(3) - 3(3) = 6 - 9 = -3 \quad (0/25)$$

پ)

۱) اعمال جبری روی توابع:

اگر توابع f و g به ترتیب دو تابع با دامنه D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، ضرب و تفریق و ... این توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

عملیات	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
تفریق	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; (g(x) \neq 0)$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x g(x) = 0\}$
توان	$(f^r)(x) = f(x) \cdot f(x)$	$D_{f^r} = D_f$
ضرب در عدد	$(kf)(x) = kf(x)$	$D_{kf} = D_f$

۲) نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع:

اگر $g \in (a, b)$ و $f \in (b, c)$ باشند، در این صورت $f \circ g \in (a, c)$ خواهد بود. به عبارت دیگر:

$$\boxed{a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \Rightarrow (a, c) \in f \circ g}$$

۳) وارون یک تابع و تابع وارون:

اگر در نمایش زوج مرتبی یک تابع، جای مؤلفه اول و دوم را در همه زوج مرتب‌ها با هم عوض کنیم، مجموعه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نمایش می‌دهیم. توجه کنید که وارون یک تابع، ممکن است تابع نباشد.

$$f = \{(-1, 3), (2, 1), (-2, 3), (0, 4)\}$$

$$f^{-1} = \{(3, -1), (1, 2), (3, -2), (4, 0)\}$$

همان‌طور که می‌بینید وارون تابع f ، تابع نمی‌باشد. حال، اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آن‌گاه تابع f را وارون‌پذیر می‌گوییم و f^{-1} را تابع وارون f می‌نامیم.





ابتدا ضابطه وارون تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ را به دست می آوریم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x-1} = 2-y}_{(0/25)} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \underbrace{(x-1) = (2-y)^2}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow x-1 = 4-4y+y^2 \Rightarrow \underbrace{x = y^2 - 4y + 5}_{(0/25)}$$

حال x را به y و y را به x تبدیل می کنیم:

$$y = f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (0/25)$$

می دانیم که دامنه یک تابع با برد تابع وارون برابر است و همچنین برد یک تابع با دامنه تابع وارون برابر است، حال در این سؤال برای پیدا کردن دامنه تابع وارون، باید برد تابع اصلی را با توجه به دامنه آن پیدا کنیم.

$$\underbrace{(0/25)}_{D_f} : [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0 \Rightarrow \underbrace{2-\sqrt{x-1} \leq 2}_{f(x)} \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 2] \quad (0/25)$$

۱) ضابطه تابع وارون:

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون تابع $f(x)$ یک به یک $f(x)$ به روش زیر عمل می کنیم:

۱) ابتدا برد تابع $f(x)$ را به دست می آوریم و به عنوان دامنه تابع f^{-1} در نظر می گیریم.

۲) سپس از معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y تعیین کرده و با تبدیل y به x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

۲) ویژگی های تابع وارون:

۱) دامنه تابع f با برد تابع f^{-1} برابر است و همچنین برد تابع f نیز با دامنه تابع f^{-1} برابر است.

$$\begin{aligned} D_f &= R_{f^{-1}} \\ R_f &= D_{f^{-1}} \end{aligned}$$

۲) نمودار تابع f و تابع f^{-1} ، نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم ($y=x$) متقارن هستند.

۳) اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، در این صورت نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد، به عبارت دیگر:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$





با توجه به توابع $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ و $g(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ ، ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f : [0, 1] \quad (0/25) \\ 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_g : \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad (0/25) \end{cases}$$

بنابراین دامنه تابع fog برابر است با:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad (0/25)$$

$$D_{fog} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} ; 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\right\} \quad (*) \quad (0/25)$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$$

از طرفی:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \xrightarrow{(1+x^2) > 0} 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad (A) \quad (0/25)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow ((x > 1) \text{ یا } (x < -1)) \cup \{0\} \quad (B) \quad (0/25)$$

حال از اشتراک (A) و (B) داریم:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ ((x > 1) \text{ یا } (x < -1)) \cup \{0\} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \{0\} \quad (0/25)$$

پس با توجه به رابطه (*)، دامنه تابع fog به صورت $D_{fog} = \{0\}$ خواهد بود. (0/25)



دامنه تابع fog: برای به دست آوردن دامنه تابع fog مراحل زیر را انجام می دهیم:

(۱) دامنه توابع f و g را به دست می آوریم.

(۲) ضابطه تابع $g(x)$ را در محدوده دامنه تابع f قرار داده و با حل نامعادله حاصل شده، محدوده ای برای x به دست می آوریم.

(۳) در نهایت بین محدوده به دست آمده در مرحله قبل و دامنه تابع g ، اشتراک می گیریم تا دامنه تابع fog به دست بیاید.

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

دامنه تابع gof: برای به دست آوردن دامنه تابع gof مراحل زیر را انجام می دهیم:

(۱) دامنه توابع f و g را به دست می آوریم.

(۲) ضابطه تابع $f(x)$ را در محدوده دامنه تابع g قرار داده و با حل نامعادله حاصل شده، محدوده ای برای x به دست می آوریم.

(۳) در نهایت بین محدوده به دست آمده در مرحله قبل و دامنه تابع f ، اشتراک می گیریم تا دامنه تابع gof به دست بیاید.

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

توجه داشته باشید که دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می آوریم و نه از روی ضابطه آن! به عنوان مثال، توابع

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ و } g(x) = 2x^2 - 1 \text{ را در نظر بگیرید:}$$

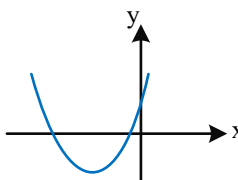
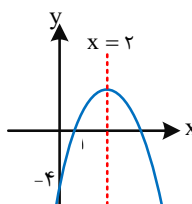
$$gof(x) = g(f(x)) = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3 \Rightarrow D_{gof} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = D_{gof} = [1, +\infty)$$

همان طور که می بینید دامنه gof با توجه به ضابطه آن برابر $\mathbb{R}$ است، در صورتی که دامنه واقعی آن با استفاده از تعریف به دست می آید که برابر $[1, +\infty)$ است.





نام و نام خانوادگی:		رشته: ریاضی و فیزیک	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحات: ۱ صفحه	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:		رشته: ریاضی و فیزیک	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحات: ۱ صفحه	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه ساز نهایی درس: حسابان ۱		ساعت شروع:	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۸/۲۵	گروه آموزشی ماز	
نام و نام خانوادگی:		رشته: ریاضی و فیزیک	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحات: ۱ صفحه	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		سؤال (پاسخ برگ دارد)	[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد]		
ردیف	سؤال (پاسخ برگ دارد)	[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد]			نمره
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) مجموع ریشه های معادله $2x^2 + 3x - 4 = 0$ برابر $-\frac{3}{2}$ و حاصل ضرب ریشه های آن برابر -2 است. ب) بیشترین مقدار تابع $y = -x^2 - 2x + 1$ برابر -2 است. پ) عدد $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ برابر $\sqrt{3}-2$ است.				۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید. الف) معادله درجه دومی که ریشه های آن $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ باشد به صورت است. ب) مجموعه جواب معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x-2} = 0$ برابر است. پ) نمایش عبارت «دو برابر فاصله بین x و 6 برابر 4 است» با نماد قدرمطلق به صورت است.				۱/۵
۳	در دنباله حسابی $3, 9, 15, \dots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از 300 بیشتر شود؟				۲/۲۵
۴	جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 3^{n-1}$ است. مجموع ده جمله اول این دنباله را به دست آورید.				۱/۵
۵	اگر $x=3$ یک ریشه معادله $2x^2 + mx - 9 = 0$ باشد، ریشه دیگر و مقدار m را به دست آورید.				۱/۲۵
۶	محیط یک مستطیل 22 سانتی متر و مساحت آن 28 سانتی متر مربع است. ابعاد مستطیل را به دست آورید.				۲
۷	شکل روبه رو نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می باشد. علامت ضرایب a, b, c را تعیین کنید.				۰/۷۵
۸	ضابطه تابع درجه دوم مقابل را بنویسید.				۲
۹	هر یک از معادله های زیر را حل کنید. الف) $\frac{1}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{5x-1}{x^3-x}$ ب) $(x-\sqrt{x})^2 - 8(x-\sqrt{x}) + 12 = 0$ پ) $2\sqrt{4x+1} - x = 4$				۵/۵
۱۰	نمودار تابع $f(x) = x-2 $ را رسم کنید و سپس معادله $f(x) = 3$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری حل کنید.				۲/۵
		موفق باشید			۲۰





نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۸/۲۵	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحات: ۷ صفحه	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه‌ساز نهایی			
گروه آموزشی ماز			
ردیف	پاسخ‌نامه	نمره	
۱	الف) درست (۰/۲۵)  مصحح شو: ب) نادرست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) بررسی دقیق‌تر: الف) با توجه به معادله $2x^2 + 3x - 4 = 0$ داریم: $\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$ ب) بیشترین مقدار تابع $y = -x^2 - 2x + 1$ به ازای $x_S = -\frac{b}{2a} = -1$ رخ می‌دهد: $y = -x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{x_S = -1} y_S = -(-1)^2 - 2(-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$ البته می‌توانستیم مستقیماً از رابطه $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ برای پیدا کردن بیشترین مقدار سهمی استفاده کنیم: $y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4(-1)(1)}{4(-1)} = -\frac{4 + 4}{-4} = \frac{8}{4} = 2$ پ) عبارت زیر رادیکال را می‌توان به صورت زیر نوشت: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = \sqrt{3} - 2 \xrightarrow{\sqrt{3} < 2} -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$	۰/۷۵	
۲	الف) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (۰/۵)  مصحح شو: ب) $\{2\}$ (۰/۵) پ) $2 x - 6 = 4$ (۰/۵) بررسی دقیق‌تر: الف) می‌دانیم معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب ریشه‌های آن P باشد را می‌توان به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت، پس: $\alpha = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 4 \\ P = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4 - 3} = 1 \end{cases}$ بنابراین معادله درجه دوم موردنظر برابر است با: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$ ب) چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است، پس تک‌تک عبارات صفر هستند و خواهیم داشت: $\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x - 2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 2\sqrt{x - 2} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$ اشتراک جواب‌های به دست آمده، $x = 2$ است، بنابراین مجموعه جواب معادله برابر $\{2\}$ است.	۱/۵	
۳	الف) $a_1 = 3$ $d = 9 - 3 = 6$ بررسی دقیق‌تر: می‌دانیم که در دنباله حسابی موردنظر باید $S_n > 300$ باشد، از طرفی با توجه به جملات دنباله داریم:	۲/۲۵	



	$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{S_n > 300} \frac{n}{2}(2 \times 3 + 6(n-1)) > 300$ $\Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 6n - 6) > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(6n) > 300 \Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow \frac{n^2}{2} > 100 \Rightarrow \frac{n}{2} > 10 \Rightarrow \frac{n}{2} \geq 11$ بنابراین حداقل باید ۱۱ جمله از دنباله موردنظر را با هم جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۳۰۰ باشد. (۰/۲۵) دنباله حسابی: به دنباله‌ای که هر جمله از اضافه کردن مقداری ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید، دنباله حسابی می‌گویند. جمله عمومی: $a_n = a_1 + (n-1)d$ مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$	
۱/۵	مصحح شو: ابتدا به کمک جمله عمومی دنباله، جمله اول و قدرنسبت دنباله را به دست می‌آوریم: $a_n = 3^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3^{1-1} = 3^0 = 1 & (0/25) \\ a_2 = 3^{2-1} = 3^1 = 3 & \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 3 & (0/25) \end{cases}$ بنابراین مجموع ده جمله این دنباله برابر است با: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (0/25)$ $S_{10} = \frac{1(1-3^{10})}{1-3} = -\frac{1}{2}(1-3^{10}) \quad \text{یا} \quad S_{10} = -\frac{1}{2}(-59048) = 29524$ مجموع جملات دنباله هندسی: در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q، مجموع n جمله اول آن برابر است با: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	۴
۱/۲۵	مصحح شو: می‌دانیم که ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس: $2x^2 + mx - 9 = 0 \xrightarrow{x=3} 2(3)^2 + 3m - 9 = 0 \Rightarrow 18 + 3m - 9 = 0 \Rightarrow 3m = -9 \Rightarrow \underline{m = -3} \quad (0/25)$ بنابراین معادله موردنظر به صورت $2x^2 - 3x - 9 = 0$ می‌باشد. حال با توجه به مجموع ریشه‌ها در این معادله، داریم: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \xrightarrow{x_1=3} 3 + x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} \quad (0/25)$ روش دوم برای پیدا کردن x_2: $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{x_1=3} 3x_2 = \frac{-9}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \quad (0/25)$ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در این صورت: $\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها: } S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \text{ضرب ریشه‌ها: } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$	۵



فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب x_1 و x_2 باشند، داریم:

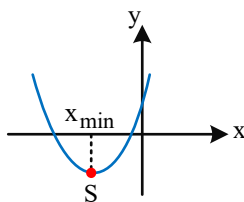
$$\begin{cases} \text{محیط مستطیل} = 22 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = 22 \Rightarrow x_1 + x_2 = 11 \quad (0/25) \\ \text{مساحت مستطیل} = 28 \Rightarrow x_1 x_2 = 28 \quad (0/25) \end{cases}$$

حال معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = 11$ و $P = 28$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} x^2 - Sx + P &= 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x-4)}_{(0/5)} \underbrace{(x-7)}_{(0/25)} = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \quad (\text{عرض مستطیل}) \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \quad (\text{طول مستطیل}) \end{cases} \end{aligned}$$



با توجه به نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ داریم:
دهانه سهمی رو به بالا است، پس: $a > 0$ (0/25)



طول نقطه مینیمم سهمی، منفی است، پس:

$$x_{\min} < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a>0} b > 0 \quad (0/25)$$

سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند، بنابراین:

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow[x>0]{x=0} a(0)^2 + b(0) + c > 0 \Rightarrow c > 0 \quad (0/25)$$

تشخیص علامت پارامترهای a, b, c :

اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) را در اختیار داشته باشیم، به کمک آن می‌توانیم علامت ضرایب a ، b و c را مشخص کنیم:
علامت a : علامت a را از روی جهت دهانه سهمی مشخص می‌کنیم، به این صورت که اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

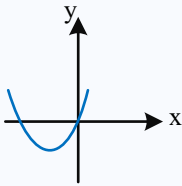
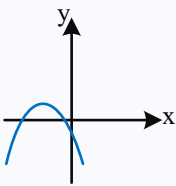
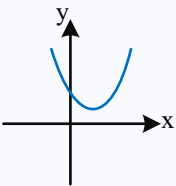
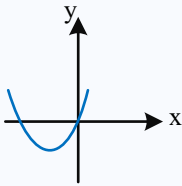
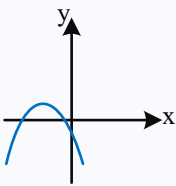
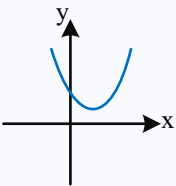
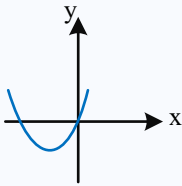
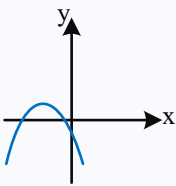
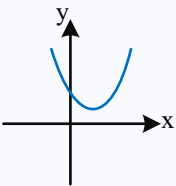
$a < 0$	$a > 0$

علامت b : برای تشخیص علامت b ، به روش زیر عمل کنیم:

ابتدا با توجه به اینکه طول رأس سهمی در کدام سمت محور y ها قرار دارد، علامت طول رأس سهمی ($x_S = -\frac{b}{2a}$) را به دست می‌آوریم و سپس به

کمک علامت a ، علامت b را مشخص می‌کنیم.

علامت c : علامت c را از روی عرض از مبدأ سهمی مشخص می‌کنیم به این صورت که اگر نمودار سهمی محور عرض‌ها را بالای محور x ها قطع کند $c > 0$ و اگر محور عرض‌ها را پایین محور x ها قطع کند $c < 0$ است. توجه کنید که اگر نمودار سهمی از مبدأ مختصات عبور کند $c = 0$ است. نمودارهای زیر را ببینید:

	<table> <tr> <th>$c = 0$</th><th>$c < 0$</th><th>$c > 0$</th></tr> <tr> <td></td><td></td><td></td></tr> </table>	$c = 0$	$c < 0$	$c > 0$				
$c = 0$	$c < 0$	$c > 0$						
								
۲	۸ مصباح شو: می‌دانیم که معادله یک سهمی به فرم $y = ax^2 + bx + c$ است، از طرفی با توجه به شکل زیر، سهمی از دو نقطه با مختصات $(0, -4)$ و $(1, 0)$ عبور می‌کند، بنابراین این نقاط در معادله سهمی صدق می‌کنند: $(0, -4) \in y \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = -4 \Rightarrow c = -4 \quad (0/25)$ $(1, 0) \in y \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 0 \xrightarrow{c=-4} a + b - 4 = 0 \Rightarrow \underbrace{a + b = 4}_{(0/25)} \quad (I)$ از طرفی، خط $x = 2$ محور تقارن سهمی است، پس: $x_S = 2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow \underbrace{b = -4a}_{(0/25)} \quad (II)$ حال به کمک روابط (I) و (II) داریم: $\begin{cases} a + b = 4 \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow a - 4a = 4 \Rightarrow -3a = 4 \Rightarrow \underbrace{a = -\frac{4}{3}}_{(0/25)} \xrightarrow{b = -4a} \underbrace{b = \frac{16}{3}}_{(0/25)}$ در نتیجه معادله این سهمی به فرم $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - 4$ است. $(0/5)$							
۵/۵	۹ مصباح شو: (الف) ابتدا مخرج هر یک از کسرها را تجزیه می‌کنیم: $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{\Delta x - 1}{x^2 - x}$ $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{\Delta x - 1}{x(x-1)(x+1)}$ کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها یعنی $x(x-1)(x+1)$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم: $x(x-1)(x+1) \left(\frac{1}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \right) = \left(\frac{\Delta x - 1}{x(x-1)(x+1)} \right) x(x-1)(x+1)$ $\Rightarrow \underbrace{(x-1) + x^2}_{(0/5)} = \Delta x - 1 \Rightarrow x^2 + x - \Delta x - 1 + 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x}_{(0/25)} = 0$ $\Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غیر قابل قبول } (0/25) \\ x = 4 \text{ قابل قبول } (0/25) \end{cases}$ توجه کنید که $x = 0$ غیر قابل قبول است (چرا که در معادله اولیه، مخرج دو تا از کسرها رو صفر می‌کنه!)							



$$(x - \sqrt{x})^2 - 8(x - \sqrt{x}) + 12 = 0$$

(ب)

ابتدا با تغییر متغیر $x - \sqrt{x} = t$ ، داریم:

$$\underbrace{t^2 - 8t + 12 = 0}_{(0/25)} \Rightarrow (t-2)(t-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (0/25)} \\ t = 6 \text{ (0/25)} \end{cases}$$

می‌دانیم که $x - \sqrt{x} = t$ است، پس:

$$\underbrace{x - \sqrt{x} = 2}_{(0/25)} \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 5x + 4 = 0}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (0/25) غیرقابل قبول} \\ x = 4 \text{ (0/25) قابل قبول} \end{cases}$$

توجه کنید که با توجه به رابطه $\sqrt{x} = x - 2$ می‌دانیم که طرف دوم این معادله بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. بنابراین $x \geq 2$ بوده و $x = 1$ غیرقابل قبول است.

$$\underbrace{x - \sqrt{x} = 6}_{(0/25)} \Rightarrow \sqrt{x} = x - 6 \xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} x = x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 13x + 36 = 0}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (0/25) غیرقابل قبول} \\ x = 9 \text{ (0/25) قابل قبول} \end{cases}$$

توجه کنید که با توجه به رابطه $\sqrt{x} = x - 6$ ، می‌دانیم که طرف دوم این معادله بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، بنابراین $x \geq 6$ بوده و $x = 4$ غیرقابل قبول است.

(پ)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{4x+1} - x &= 4 \\ \underbrace{2\sqrt{4x+1} = x+4}_{(0/25)} &\xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} \underbrace{4(4x+1) = x^2 + 8x + 16}_{(0/25)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 16x + 4 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 8x + 12 = 0}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-6)(x-2) = 0}_{(0/25)} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ (0/25) قابل قبول} \\ x = 2 \text{ (0/25) قابل قبول} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:



- یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.
- طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.) (توجه داشته باشید که اگر با توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد، سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.)
- معادله به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به‌دست می‌آوریم.
- جواب(های) به‌دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادله اصلی صدق کنند.

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



- ابتدا مخرج هر یک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. (چندجمله‌ای)
- طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.
- عبارت جبری به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادله حاصل شده (معمولاً درجه ۲) را حل می‌کنیم.
- در نهایت جواب‌های به‌دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم.
- توجه کنید که جواب‌های به‌دست آمده زمانی قابل قبول خواهند شد که اولاً مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند (قسمت دوم رو متوجه نشدم! یعنی این که مثلاً اگر قراره با حل یه معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم،



اندازه این طول رو منفی به دست نیاوریم.



روش حل برخی از معادله‌ها، باید با استفاده از تغییر متغیر، آن معادلات را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد.

برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

برای حل برخی از معادله‌ها، باید با استفاده از تغییر متغیر، آن معادلات را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد، برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا در معادله داده شده، به جای یک عبارت بر حسب x ، از یک تغییر متغیر مناسب (مثلاً t) استفاده کرده و معادله داده شده را به معادله درجه دوم بر حسب t تبدیل می‌کنیم.

سپس معادله درجه دوم را حل کرده و مقدار (مقادیر) t را به دست می‌آوریم.

در نهایت عبارتی که آن را برابر t فرض کرده بودیم را برابر مقدار (مقادیر) t قرار می‌دهیم و با حل آن مجهول‌های اصلی یعنی x را به دست می‌آوریم.

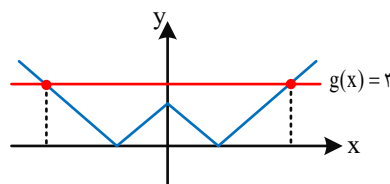
۲/۵

۱۰ مصحح شو:

حل به روش هندسی:

ابتدا نمودار توابع $f(x) = |x| - 2$ و $g(x) = 3$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو نمودار، ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ هستند.

(رسم نمودار، ۰/۷۵ نمره)



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، معادله $|x| - 2 = 3$ دارای دو جواب است. (۰/۲۵)

حل به روش جبری:

$$\begin{aligned} & \overbrace{|x| - 2 = 3}^{(0/25)} \Rightarrow |x| - 2 = \pm 3 \quad (0/25) \\ & \left\{ \begin{array}{l} |x| - 2 = 3 \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5 \quad (0/25) \\ |x| - 2 = -3 \Rightarrow |x| = -1 \Rightarrow \text{امکان پذیر نیست} \quad (0/25) \end{array} \right. \end{aligned}$$

چند ویژگی مهم قدرمطلق ($a > 0$):



۱) $ x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$	۶) $ x ^2 = x^2$
۲) $ x = a \Rightarrow x = \pm a$	۷) $ xy = x \times y $
۳) $ x = a \Rightarrow x = \pm a$	۸) $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }; y \neq 0$
۴) $\sqrt{x^2} = x $	۹) $ x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$
۵) $ -x = x $	۱۰) $ x \geq a \Rightarrow (x \geq a) \text{ یا } (x \leq -a)$

توجه: برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$* -|a| \leq a \leq |a|, \quad * -(a + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$* |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{نامساوی مثلث}) \xrightarrow{ab \geq 0} |a + b| = |a| + |b|$$



نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x + a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x - a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x) + a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x) - a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آنچه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

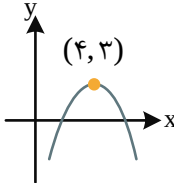
۲۰

موفق باشید





به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: حسابان ۱		تعداد صفحه: ۱	رشته:	ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - یازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۹/۲۳	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۴۰ دقیقه	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			گروه آموزشی ماز		
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)				نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (الف) مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی «۲, ۵, ۸, ۱۱, ...» برابر ۶۱۰ است. (ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $ a+b \geq a + b $. (پ) هم‌دامنه تابع، زیرمجموعه‌ای از برد آن است. (ت) در معادله $ x^2-4 + y-1 =0$ ، y تابعی از x است.				۲
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (الف) نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به صورت مقابل است.  اگر $ a =1$ باشد، ضابطه سهمی برابر است. (ب) اگر تابع $p(x)=3x^4-7x^2+mx+1$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار m برابر است. (پ) خط $4x+3y=5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع این دایره برابر با است. (ت) تعداد توابع از مجموعه $A=\{a, b, c\}$ به مجموعه $B=\{d, e\}$ برابر با است.				۲
۳	طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟				۲
۴	معادله $x^2-2x-4=0$ مفروض است. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن از نصف ریشه‌های معادله داده شده یک واحد بیشتر باشد.				۲
۵	محدثه یک مجله را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از فاطمه تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند در ۱۸ ساعت کار انجام می‌شود، محدثه به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟				۲.۵
۶	معادله قدرمطلق $ x+1 +x=2$ را حل کنید. (به روش دلخواه)				۱
۷	نقاط $A(4, 2)$, $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH را به دست آورید.				۴.۵
۸	آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ با هم برابرند؟ چرا؟				۲
۹	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & ; x < 0 \\ \sqrt{x-1}+2 & ; x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.				۲
۲۰	موفق باشید.				





راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: حسابان ۱		رشته:	ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/۰۹/۲۳	ساعت شروع:
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	گروه آموزشی ماز		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره	آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی
۱	مصحح شو! الف) درست (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) پ) نادرست (۰/۵) ت) درست (۰/۵) بررسی دقیق‌تر: الف) درست است. (صفحه ۳) در دنباله حسابی «... ۲, ۵, ۸, ۱۱» داریم: $\begin{cases} \text{جمله اول: } a_1 = 2 \\ \text{قدر نسبت: } d = 3 \\ \text{تعداد جملات: } n = 20 \end{cases}$ $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ $S_{20} = \frac{20}{2} [(2 \times 2) + (19 \times 3)] = 10 \times [4 + 57] = 10 \times 61 = 610$ دنباله حسابی به دنباله‌ای که هر جمله از اضافه کردن مقداری ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید، دنباله حسابی می‌گویند. جمله عمومی: $a_n = a_1 + (n-1)d$ مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$ ب) نادرست است. (صفحه ۲۵)	۲	اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $a+b \leq a + b$ است. اثبات: برای هر دو عدد a و b همواره داریم: $\begin{cases} - a \leq a \leq a \\ - b \leq b \leq b \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کردن طرفین}} - a - b \leq a+b \leq a + b \Rightarrow -(a + b) \leq a+b \leq a + b $ حالا با توجه به رابطه $-C \leq u \leq C \Leftrightarrow u \leq C$، داریم: $-(a + b) \leq a+b \leq a + b \Rightarrow a+b \leq a + b $ چند ویژگی مهم قدرمطلق ($a > 0$): ۱) $x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$ ۲) $x = a \Rightarrow x = \pm a$ ۳) $x = a \Rightarrow x = \pm a$ ۴) $\sqrt{x^2} = x$ ۵) $-x = x$ ۶) $x ^2 = x^2$ ۷) $xy = x \times y$ ۸) $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }; y \neq 0$ ۹) $x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ ۱۰) $x \geq a \Rightarrow (x \geq a) \text{ یا } (x \leq -a)$





توجه:

برای هر عدد حقیقی a و b ، داریم:

$$* -|a| \leq a \leq |a|, \quad * -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$* |a + b| \leq |a| + |b| \xrightarrow{ab \geq 0} |a + b| = |a| + |b| \quad (\text{نامساوی مثلث})$$

(پ) نادرست است. (صفحه ۴۲)

برد یک تابع نهایتاً می‌تواند با هم‌دامنه آن برابر باشد و هیچ‌گاه هم‌دامنه یک تابع نمی‌تواند زیرمجموعه برد آن باشد.

(ت) درست است. (صفحه ۴۸)

می‌دانیم که اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر باشد، هرکدام از آن عبارت‌ها برابر صفر هستند، پس:

$$|x^2 - 4| + |y - 1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x^2 - 4| = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ |y - 1| = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

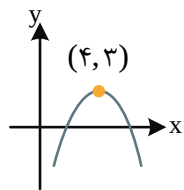
بنابراین این تابع فقط دارای دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(-2, 1)$ است.

مصحح شو!

الف) $y = -x^2 + 8x - 13$ (۵/۰) ب) ۳ (۵/۰) پ) $\frac{3}{5}$ (۵/۰) ت) ۸ (۵/۰)

بررسی دقیق‌تر:

الف) $-x^2 + 8x - 13$ (صفحه ۱۶)



می‌دانیم که $|a| = 1$ است، پس $a = \pm 1$ می‌باشد. از طرفی با توجه به شکل مقابل، چون دهانه سهمی رو به پایین است، در نتیجه $a = -1$ است.

همچنین نقطه $S(4, 3)$ ، نقطه ماکزیمم تابع است، بنابراین:

$$x_S = 4 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 4 \xrightarrow{a=-1} \frac{b}{2} = 4 \Rightarrow b = 8$$

از طرفی $f(4) = 3$ است، پس:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\substack{a=-1 \\ b=8}} f(x) = -x^2 + 8x + c$$

$$f(4) = 3 \Rightarrow -(4)^2 + 8(4) + c = 3 \Rightarrow c = 3 + 16 - 32 \Rightarrow c = -13$$

در نتیجه ضابطه سهمی مورد نظر به صورت $y = -x^2 + 8x - 13$ است.

(ب) ۳ (صفحه ۱۳)

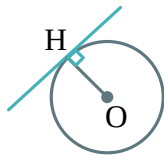
از آن‌جا که $p(x) = 3x^4 - 7x^2 + mx + 1$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است، می‌توان نتیجه گرفت که $p(x)$ عاملی به صورت $(x-1)$ دارد، بنابراین $x = 1$ یک صفر تابع $p(x)$ است، به عبارتی $p(1) = 0$ می‌باشد، پس:

$$p(x) = 3x^4 - 7x^2 + mx + 1 \xrightarrow{p(1)=0} 3(1)^4 - 7(1)^2 + m(1) + 1 = 0 \Rightarrow 3 - 7 + m + 1 = 0 \Rightarrow m = 3$$



پ) $\frac{3}{5}$ (صفحه ۳۵)

می‌دانیم که شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس، عمود است. بنابراین فاصله نقطه $O(-1, 2)$ از خط $4x + 3y - 5 = 0$ با شعاع دایره برابر است.



$$R = OH = \frac{|4(-1) + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-4 + 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-3|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

ت) ۸ (صفحه ۴۲)

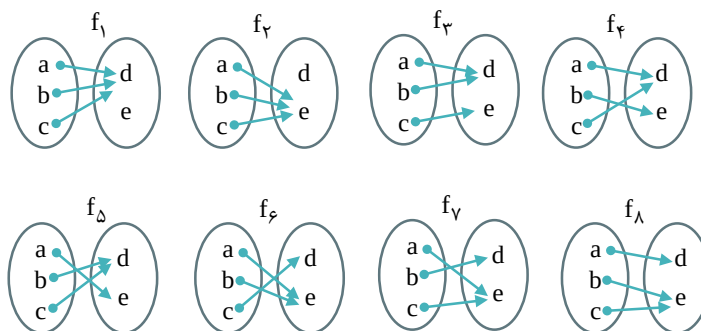
روش اول: استفاده از اصل ضرب:

می‌دانیم که همه اعضای مجموعه A در تشکیل تابع موردنظر شرکت دارند، بنابراین این تابع را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f = \{(a, y_1), (b, y_2), (c, y_3)\}$$

حال به جای هر کدام از مقادیر y_1, y_2, y_3 هر یک از دو عضو مجموعه B می‌تواند قرار گیرد، پس طبق اصل ضرب تابع موردنظر را به $2 \times 2 \times 2 = 8$ حالت متمایز می‌توان ساخت.

روش دوم: استفاده از نمودار پیکانی:



روش سوم: استفاده از فرمول:

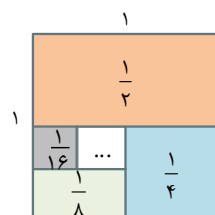
تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر n^m است، بنابراین در این سوال، تعداد توابع از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ برابر $2^3 = 8$ است.

مصحح شو!

(صفحه ۶) مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{1}{4}$ ، مرحله دوم $\frac{1}{4}$ ، مرحله سوم $\frac{1}{8}$ و به همین صورت، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{1}{4}$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ می‌دهند:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

(۰/۲۵)



۳



می‌دانیم که باید مجموع مساحت‌های رنگ‌آمیزی شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد، به عبارتی:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{(0/25)} \geq \frac{99}{100}$$

$$S_n = \underbrace{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}_{(0/25)} = \underbrace{\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}}_{(0/25)} \geq \frac{99}{100}$$

$$\underbrace{1 - (\frac{1}{2})^n}_{(0/25)} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq 1 - \frac{99}{100} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2^n \geq 100}_{(0/25)} \xrightarrow[2^7=128]{2^6=64} \underbrace{n=7}_{(0/25)}$$

بنابراین بعد از مرحله هفتم، حداقل ۹۹ درصد از مربع، رنگ‌آمیزی می‌شود.

مجموع جملات دنباله هندسی



$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q ، مجموع n جمله اول آن برابر است با:

مصحح شو!

(صفحه ۹) فرض می‌کنیم که α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ هستند، در این صورت:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن از نصف ریشه‌های معادله فوق یک واحد بیشتر باشد، به عبارت دیگر می‌خواهیم

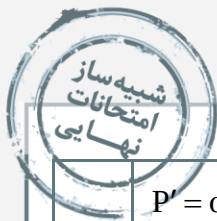
معادله‌ای را تشکیل دهیم که ریشه‌های آن به صورت $\alpha' = \frac{\alpha}{2} + 1$ و $\beta' = \frac{\beta}{2} + 1$ باشند، لذا داریم:

$$S' = \alpha' + \beta' = \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) + \left(\frac{\beta}{2} + 1\right)}_{(0/25)} = \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) + 2}_{(0/25)} = \underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + 2\right)}_{(0/25)}$$

$$S' = \underbrace{\left(\frac{2}{2} + 2\right)}_{(0/25)} = 3$$

۴

۲



$$P' = \alpha'\beta' = \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)\left(\frac{\beta}{2} + 1\right)}_{(0/25)} = \underbrace{\left(\frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 1\right)}_{(0/25)} = \underbrace{\frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\alpha + \beta}{2} + 1}_{(0/25)}$$

$$P' = \frac{-4}{4} + \frac{2}{2} + 1 = -1 + 1 + 1 = \underbrace{1}_{(0/25)}$$

بنابراین معادله خواسته شده برابر است با:

$$\underbrace{x^2 - S'x + P'}_{(0/25)} = 0 \xrightarrow[P'=1]{S'=3} \underbrace{x^2 - 3x + 1}_{(0/25)} = 0$$

دو نکته کاربردی!

۱. اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در این صورت:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها: } S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \text{ضرب ریشه‌ها: } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

۲. اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آن‌گاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

مصحح شو!

(صفحه ۲۲) اگر فرض کنیم که محدثه به تنهایی در t ساعت کار را انجام می‌دهد، با توجه به اطلاعات سوال، فاطمه به تنهایی در $t + 15$ ساعت کار را انجام می‌دهد. بنابراین هر کدام به تنهایی در یک ساعت به ترتیب $\frac{1}{t}$ و $\frac{1}{t+15}$ از کل کار را انجام می‌دهند. می‌دانیم که اگر این دو نفر با هم کار کنند، کل کار در ۱۸ ساعت انجام می‌شود، پس این دو نفر با هم، در یک ساعت $\frac{1}{18}$ کار را انجام می‌دهند، بنابراین:

$$\frac{v}{t} + \frac{v}{t+15} = \frac{v}{18} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15}}_{(0/5)} = \frac{1}{18} \Rightarrow \underbrace{\frac{(t+15)+t}{t(t+15)}}_{(0/25)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{2t+15}{t^2+15t} = \frac{1}{18} \Rightarrow t^2+15t = 36t+270 \Rightarrow \underbrace{t^2-21t-270}_{(0/25)} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(t-30)(t+9)}_{(0/5)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=30 \rightarrow \text{قق} (0/25) \\ t=-9 \rightarrow \text{غقق} (0/25) \end{cases}$$

بنابراین محدثه به تنهایی کل کار را در مدت زمان ۳۰ ساعت و فاطمه به تنهایی کل کار را در $t+15 = 45$ ساعت انجام می‌دهد.

(۵/۵)

۵



مصحح شو!

(صفحه ۲۶) ابتدا معادله قدرمطلق $|x+1| + x = 2$ را به صورت $|x+1| = 2-x$ بازنویسی می‌کنیم. حالا برای حل این معادله به سه روش می‌توان عمل کرد:

روش اول: استفاده از تعریف قدرمطلق:

$$\text{حالت اول: } x \geq -1 \Rightarrow (x+1) = 2-x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \geq -1} \text{ قق} \quad \begin{matrix} (0/25) \\ (0/25) \end{matrix}$$

$$\text{حالت دوم: } x < -1 \Rightarrow -(x+1) = 2-x \Rightarrow -1 = 2 \quad \text{(غیرممکن)} \quad \begin{matrix} (0/25) \\ (0/25) \end{matrix}$$

بنابراین $x = \frac{1}{2}$ ، تنها جواب این معادله است.

روش دوم: به توان رساندن طرفین:

می‌دانیم که $|x|^2 = x^2$ است، پس:

$$|x+1| = 2-x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} |x+1|^2 = (2-x)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = (2-x)^2 \quad \begin{matrix} (0/25) \\ (0/25) \end{matrix}$$

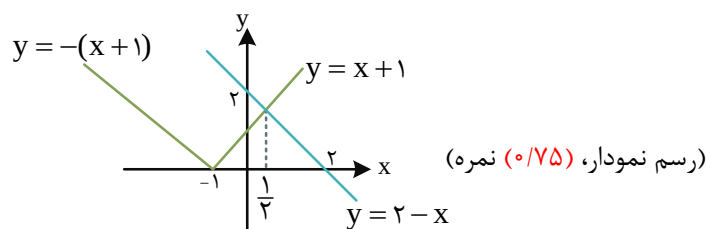
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow 2x + 1 = 4 - 4x \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} (0/25) \\ (0/25) \end{matrix}$$

۶

بنابراین $x = \frac{1}{2}$ ، تنها جواب این معادله است.

روش سوم: به روش هندسی:

در این روش، ابتدا توابع $y = |x+1|$ و $y = 2-x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



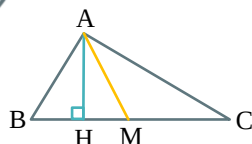
سپس طول (های) محل تلاقی دو نمودار را به دست می‌آوریم که طبق نمودار فوق، این نقطه حاصل برخورد نمودار $y = 2-x$ با نمودار $y = |x+1|$ است، حال برای به دست آوردن طول تلاقی دو نمودار، باید معادله $2-x = |x+1|$ را حل کنیم:

$$2-x = |x+1| \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} (0/25) \end{matrix}$$

بنابراین $x = \frac{1}{2}$ ، تنها جواب این معادله است.



مصحح شو!



(صفحه ۳۶) ابتدا معادله خط شامل ضلع BC را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} B(1, -1) \\ C(8, -2) \end{cases} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-2+1}{8-1} = \frac{-1}{7} \Rightarrow y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{7}(x - 1)$$

بنابراین معادله خط شامل ضلع BC به صورت $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$ یا $x + 7y + 6 = 0$ است.

حال فاصله نقطه $A(4, 2)$ از خط $x + 7y + 6 = 0$ را که همان اندازه ارتفاع AH می‌باشد، محاسبه می‌کنیم:

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 + 14 + 6|}{\sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{24}{\sqrt{50}}$$

حالا مختصات نقطه وسط پاره خط BC را به دست می‌آوریم: (نقطه M)

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

حال فاصله دو نقطه $A(4, 2)$ و $M\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 4\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$AM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه AHM، براساس رابطه فیثاغورس، داریم:

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 \Rightarrow MH^2 = AM^2 - AH^2 \Rightarrow MH^2 = \left(\sqrt{\frac{50}{4}}\right)^2 - \left(\frac{24}{\sqrt{50}}\right)^2$$

$$MH^2 = \frac{50}{4} - \frac{576}{50} = \frac{1250 - 1152}{100} = \frac{98}{100} \Rightarrow MH = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{100}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$



مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط، فاصله دو نقطه، فاصله نقطه از خط، معادله خط گذرنده از دو نقطه

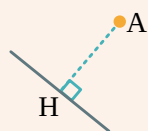
(۱) مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه از یک خط باشند، مختصات نقطه وسط این دو نقطه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

(۲) فاصله دو نقطه: برای پیدا کردن فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از هم، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

(۳) فاصله نقطه از خط: برای پیدا کردن فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$ ، از رابطه زیر کمک می‌گیریم:



$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(۴) معادله خط گذرنده از دو نقطه: اگر مختصات نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را در اختیار داشته باشیم، به کمک دو رابطه زیر می‌توانیم معادله خط گذرنده از این دو نقطه را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} \text{شیب خط: } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ \text{معادله خط: } y - y_A = m(x - x_A) \end{cases}$$

مصحح شو!

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$P = \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 1 & \\ \hline P & - & + & - \end{array} \Rightarrow x \in (-1, 1] \Rightarrow D_f = (-1, 1] \quad (0/5)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ 1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (-1, 1] \Rightarrow D_g = (-1, 1] \quad (0/5)$$

از آن جا که $D_f = D_g$ ، تساوی ضابطه‌های دو تابع را بررسی می‌کنیم. به کمک قوانین رادیکال‌ها داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \underbrace{g(x)}_{(0/25)}$$

بنابراین ضابطه‌های دو تابع نیز با هم برابر است. در نتیجه دو تابع f و g با هم برابرند. (۰/۵)



تساوی توابع

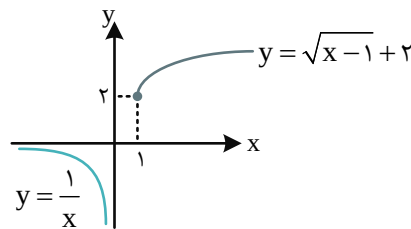
دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

(الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

(ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

مصحح شو!

(صفحه ۵۳) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x < 0 \\ \sqrt{x-1} + 2 & ; x \geq 1 \end{cases}$ را با توجه به شرط هر یک از ضابطه‌ها، در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



(رسم نمودار $y = \frac{1}{x}$; $x < 0$)، (۵/۰) نمره

(رسم نمودار تابع $y = \sqrt{x-1} + 2$; $x \geq 1$)، (۵/۰) نمره

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، دامنه و برد تابع برابر است با:

$$D_f = \underbrace{(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)}_{(0/5)}$$

$$R_f = \underbrace{(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)}_{(0/5)}$$

انتقال و تبدیل نمودار توابع

نمودار جدید ($a > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آنچه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

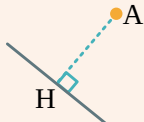


به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: حسابان ۱		تعداد صفحه: ۱	رشته:	ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - یازدهم		تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۲/۱۸	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز					
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)				
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (الف) در دنباله حسابی ... ۳, ۷, ۱۱, ... قدرنسبت برابر و مجموع چهار جمله اول برابر است. (ب) فاصله نقطه $A(2, 3)$ از خط $3x + 4y = 3$ برابر و فاصله آن از نقطه $(-2, 0)$ برابر است. (پ) تعداد ریشه‌های معادله $3x - 2 = x + 6$ برابر و مجموع این ریشه‌ها برابر است. (ت) اگر $f = \{(2, 3), (1, 4), (3, 2)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 0), (4, 1)\}$ باشد، تعداد اعضای دامنه توابع $f + g$ و $\frac{f}{g}$ به ترتیب برابر و است.				
۲	فرض کنید α و β صفرهای تابع $f(x) = x^2 - 4x - 2$ باشند: (الف) حاصل $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ را محاسبه کنید. (ب) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\alpha + 1$ و $\beta + 1$ باشد. (پ) علامت $\alpha\beta$ را به دست آورید و سپس تعیین کنید که نمودار سهمی $y = x^2 + x + \alpha\beta$ از کدام نواحی مختصات عبور می‌کند.				
۳	معادلات زیر را حل کنید. (الف) $\sqrt{2x+3} + 2x = 3$ (ب) $\frac{x}{2-x} + \frac{2}{x} = \frac{-7}{3}$				
۴	(الف) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} [x] & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 & 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید. (ب) ضابطه وارون تابع $y = \sqrt{x-2} + 1$ با دامنه $2 \leq x \leq 6$ را محاسبه کرده و سپس نمودار تابع به دست آمده را رسم کنید.				
۵	(الف) اگر $f(x) = \sqrt{6-x}$ و $g(x) = 2 + \sqrt{x-3}$ باشد دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. (ب) اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, -1), (4, 1)\}$ و $g = \{(1, 3), (2, -1), (3, 1), (4, 2)\}$ باشد، تابع $f^{-1} \circ g$ را به دست آورید و برد آن را بنویسید.				
۶	(الف) نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = 2^{-x}$ و $y = 3^{-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. (ب) نامعادله $(\frac{125}{8})^{x+1} < (\frac{1}{4})^{2x+2}$ را حل کنید.				
۲۰	موفق باشید.				



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: حسابان ۱	رشته:	ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۲/۱۸
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	ساعت شروع:	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصحح شو: الف) ۴ و ۳۲۴۰ (۰/۵) ب) ۳ و ۵ (۰/۵) پ) ۲ و ۳ (۰/۵) ت) ۱ و ۲ (۰/۵) دنباله حسابی به دنباله‌ای که هر جمله به غیر از جمله اول از اضافه کردن مقداری ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید، دنباله حسابی می‌گویند. جمله عمومی: $a_n = a_1 + (n-1)d$ مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ دو نکته کاربردی! ۱. اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در این صورت: $\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} & \text{جمع ریشه‌ها} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} & \text{ضرب ریشه‌ها} \end{cases}$ ۲. اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آن‌گاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند. مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط، فاصله دو نقطه، فاصله نقطه از خط، معادله خط گذرنده از دو نقطه ۱) مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه از یک خط باشند، مختصات نقطه وسط این دو نقطه به صورت زیر به دست می‌آید: $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ ۲) فاصله دو نقطه: برای پیدا کردن فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از هم، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ۳) فاصله نقطه از خط: برای پیدا کردن فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$، از رابطه زیر کمک می‌گیریم:  $AH = \frac{ ax_A + by_A + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ۴) معادله خط گذرنده از دو نقطه: اگر مختصات نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را در اختیار داشته باشیم، به کمک دو رابطه زیر می‌توانیم معادله خط گذرنده از این دو نقطه را تشکیل دهیم: $\begin{cases} m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} & \text{شیب خط} \\ y - y_A = m(x - x_A) & \text{معادله خط} \end{cases}$	۲



مصحح شو:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 4 & (0/25) \\ \alpha\beta = -2 & (0/25) \end{cases}$$

(الف)

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\beta + 2\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2 \times 4}{-2} = -4 \quad (0/25)$$

۴.۵

$$S = \alpha + 1 + \beta + 1 = (\alpha + \beta) + 2 = 4 + 2 = 6 \quad (0/25)$$

(ب)

$$P = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \underbrace{-2 + 4 + 1}_{(0/25)} = 3 \quad (0/25)$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$$

پ) علامت $\alpha\beta$ منفی است (۰/۲۵)، پس ضرب ریشه‌های معادله $x^2 + x + \alpha\beta = 0$ منفی است (۰/۲۵) و نمودار سهمی از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. (۰/۵)

مصحح شو:

$$\text{الف) } \sqrt{2x+3} = 3-2x \xrightarrow{\text{توان}} 2x+3 = (3-2x)^2$$

$$\Rightarrow 2x+3 = 9-12x+4x^2 \Rightarrow 4x^2-14x+6=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-7x+3=0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ یا } 3 \quad (0/25)$$

جواب $x=3$ قابل قبول نیست، چون در معادله صدق نمی‌کند. (۰/۵)

ب) مخرج مشترک می‌گیریم و یا دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\frac{x^2+2(2-x)}{x(2-x)} = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{x^2-2x+4}{2x-x^2} = -\frac{7}{3}$$

طرفین وسطین می‌کنیم:

$$3x^2-6x+12 = -14x+7x^2 \Rightarrow 4x^2-8x-12=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 & (0/25) \\ x=3 & (0/25) \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول اند، چون مخرج هیچ کدام از کسرهای برابر صفر نمی‌شود. (۰/۵)

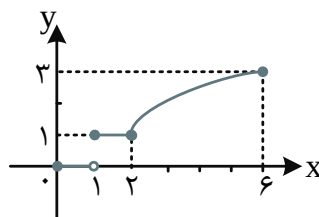




مصحح شو:

(الف)

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 & (0/25) \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 & (0/25) \end{cases}$$



(0/5)

برای رسم نمودار $y = \sqrt{x-2} + 1$ نمودار $\sqrt{x}$ را دو واحد به راست (0/25) و یک واحد به بالا (0/25) انتقال می‌دهیم.

راهنمای مصحح

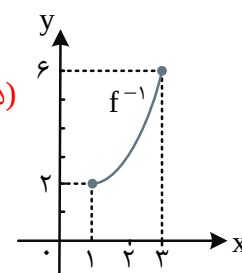
چنانچه دانش‌آموز برای پاسخ‌گویی به این سؤال، بدون توضیحات، فقط نمودار را رسم کند، ۱ نمره به رسم تعلق می‌گیرد.

دامنه تابع f بازه $[0, 6]$ (0/25) و برد آن بازه $\{0\} \cup [1, 3]$ (0/25) است.

$$y = \sqrt{x-2} + 1 ; 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3$$

$$y-1 = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 = (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 3 \quad (0/25)$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 3 \quad (0/5) ; 1 \leq x \leq 3 \quad (0/25)$$



(0/5)

تبدیل نمودار تابع

نمودار جدید (a, k > 0)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$f(kx)$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$kf(x)$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.



ضابطه تابع وارون

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

ویژگی‌های تابع وارون

۱) دامنه تابع f با برد تابع f^{-1} برابر است و همچنین برد تابع f نیز با دامنه تابع f^{-1} برابر است: $D_f = R_{f^{-1}}$ ، $R_f = D_{f^{-1}}$

۲) نمودار تابع f و تابع f^{-1} ، نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم $(y = x)$ متقارن هستند.

مصحح شو:

$$D_f = (-\infty, 6] \quad (0/25) \quad D_g = [3, +\infty) \quad (0/25)$$

(الف)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad (0/25)$$

$$= \{x \geq 3 \mid 2 + \sqrt{x-3} \leq 6\} = \{x \geq 3 \mid 0 \leq x-3 \leq 16\} = \{x \geq 3 \mid 3 \leq x \leq 19\} = [3, 19] \quad (0/25) \quad (0/25)$$

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (-1, 3), (1, 4)\} \quad (0/5)$$

(ب)

$$f^{-1} \circ g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \quad (1)$$

$$f^{-1} \circ g \text{ برد} = \{2, 3, 4, 1\} \quad (0/5)$$

۳.۵

۵

ترکیب دو تابع f و g

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

۱- برای دو تابع f و g ، داریم:

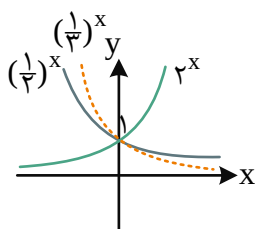
۲- اگر f و g دو تابع باشند، $f \circ g$ را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ترتیب:

مصحح شو:



(0/75)

الف) نمودار 2^x و $(\frac{1}{2})^x$ و $(\frac{1}{3})^x$ مورد نظر است.

۲

۶

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+2} < \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{-2x-2} < \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+3} \quad (0/5) \quad (0/25)$$

(ب)

$$\Rightarrow -2x-2 < 3x+3 \Rightarrow 5x > -5 \Rightarrow x > -1 \quad (0/25)$$



نمودار توابع نمایی

وضعیت	$a > 1$	$0 < a < 1$
نمودار		
دامنه	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
بردار	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$

معادلات نمایی

به معادله‌ای که در آن متغیر (مجهول) توی توان باشد، معادله نمایی می‌گیم.

تیپ ۱ معادله نمایی: معادلاتی که بعد از ساده‌سازی توسط قوانین توان‌ها، به فرم $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ تبدیل می‌شوند و یا به عبارتی سعی کرده‌ایم که در دو طرف تساوی، پایه‌ها را یکسان کنیم.

برای حل این نوع از معادله‌ها، بعد از این‌که پایه‌های دو طرف تساوی رو یکی کردیم، پایه‌ها رو از دو طرف حذف می‌کنیم و توان‌ها رو باهم برابر قرار می‌دیم، یعنی:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

تیپ ۲ معادله نمایی: در برخی از معادلات نمایی لازم است برای حل معادله از تغییر متغیر $t = a^x$ استفاده کنیم و پس از محاسبه مقدار t ، با حل معادله $t = a^x$ مقدار x را به دست آوریم.

تیپ ۳ معادله نمایی: توی حل بعضی از معادلات می‌توانیم با استفاده از روش هندسی و رسم نمودار، مسئله رو به جواب برسونیم به خصوص وقتی که از ما تعداد جواب‌ها رو بخوان. حالا رخ کار رو ببین...

وارون توابع نمایی

وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a^x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم، (یعنی هر تابع

لگاریتمی، وارون یک تابع نمایی است و بالعکس) به عبارت دیگر:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a^x$$